الکترومغناطیس

فصل ۱ : آنالیز برداری

مطالب گفته شده:

- نمایش بردار
- قواعد ساده برداری : جمع ، تفریق و ضربهای برداری(ضزب عدد در بردار ، ضرب داخلی و ضرب خارجی)

دستگاه های مختصات:

دستگاه های مختصات متعامد:

ثابت های هر سطح u_1 , u_2 , u_3

بردارهای یکه (عمود بر سطح) $\hat{a}_{u1} , \hat{a}_{u2}, \hat{a}_{u3}$

$\hat{a}_{u1} \cdot \hat{a}_{u2} = 0$

$\hat{a}_{u1} \cdot \hat{a}_{u3} = 0$

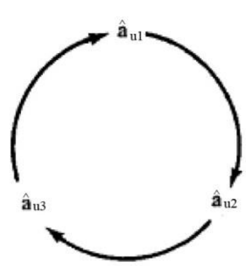
$\hat{a}_{u2} \cdot \hat{a}_{u3} = 0$

دستگاه های مختصات راستگرد:

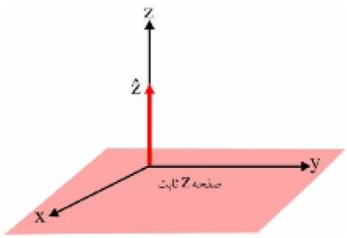
$\hat{a}_{u1} \times \hat{a}_{u2} = \hat{a}_{u3}$

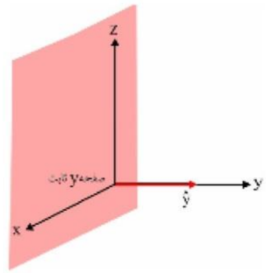
$\hat{a}_{u2} \times \hat{a}_{u3} = \hat{a}_{u1}$

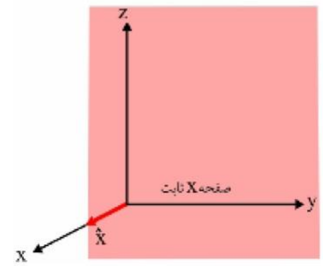
$\hat{a}_{u3} \times \hat{a}_{u1} = \hat{a}_{u2}$

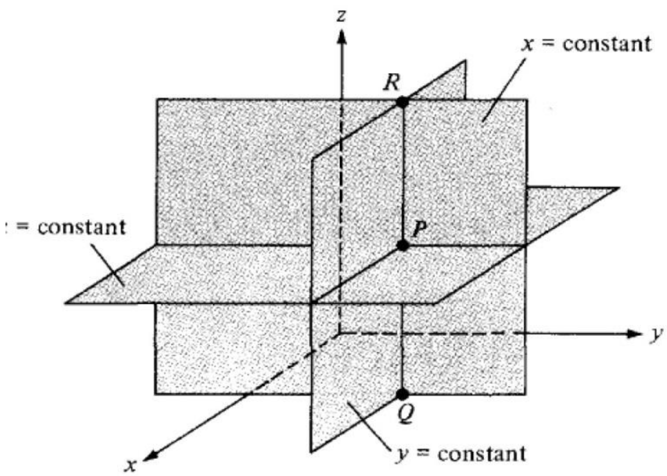


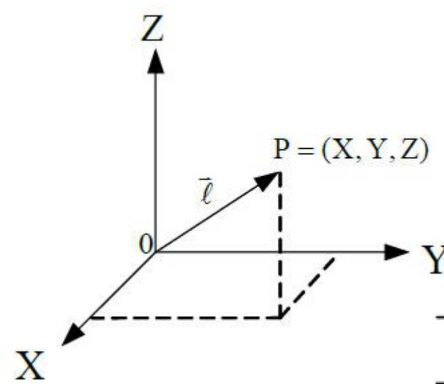
دستگاه مختصات دکارتی (مستطیلی – کارتزین):









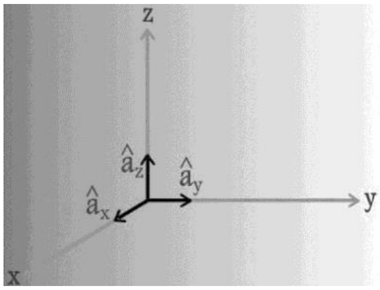


$-\infty < x < \infty$

$-\infty < y < \infty$

$-\infty < z < \infty$

$$Point\ P = (x\ ,\ y\ ,\ z)$$

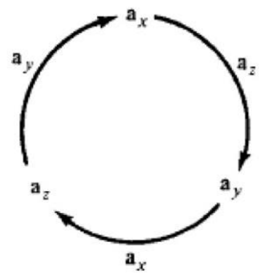


بردارهای یکه : $\hat{a}_x$ یا $\hat{\imath}$ – $\hat{a}_y$ یا $\hat{\jmath}$ – $\hat{a}_z$ یا $\hat{k}$

$$\hat{a}_x.\hat{a}_x = \hat{a}_y.\hat{a}_y = \hat{a}_z.\hat{a}_z = 1$$

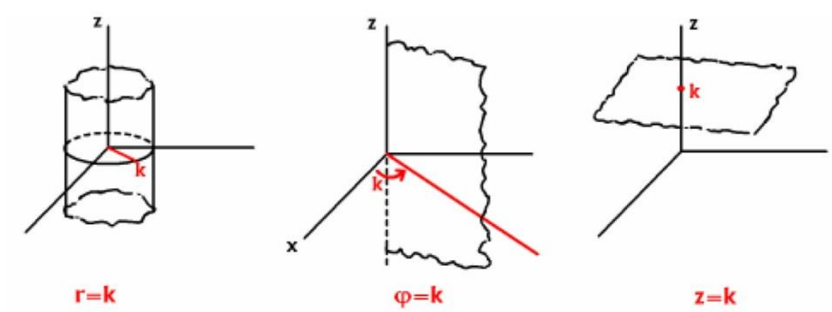
متعامد بودن صفحات : $\hat{a}_x . \hat{a}_y = \hat{a}_x . \hat{a}_z = \hat{a}_y . \hat{a}_z = 0$

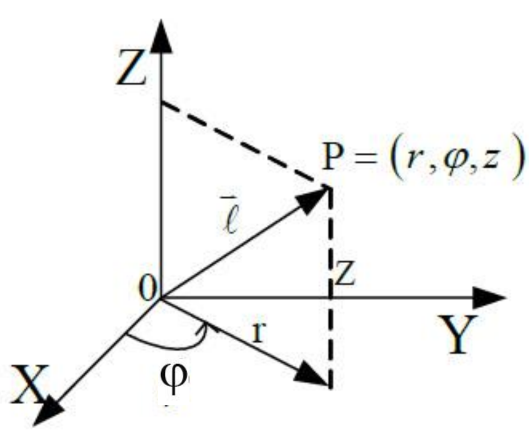
راستگرد بودن دستگاه : $\hat{a}_z \times \hat{a}_x = \hat{a}_y \quad , \quad \hat{a}_y \times \hat{a}_z = \hat{a}_x \quad , \quad \hat{a}_x \times \hat{a}_y = \hat{a}_z$



نمایش بردار : $\vec{A} = A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z$

دستگاه مختصات استوانه ای :



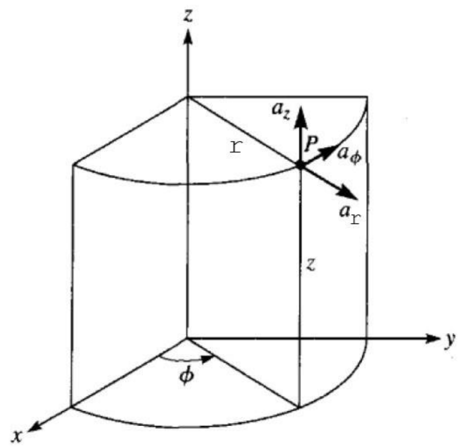


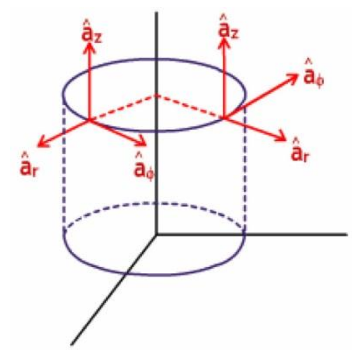
$0 \le r < \infty$

$0 \le \varphi < 2\pi$

$-\infty < z < \infty$

بردارهای یکه:





$\hat{a}_r \cdot \hat{a}_r = 1$, $\hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_\phi = 1$, $\hat{a}_z \cdot \hat{a}_z = 1$

متعامد بودن صفحات :

$\hat{a}_r \cdot \hat{a}_\phi = 0$, $\hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_z = 0$, $\hat{a}_z \cdot \hat{a}_r = 0$

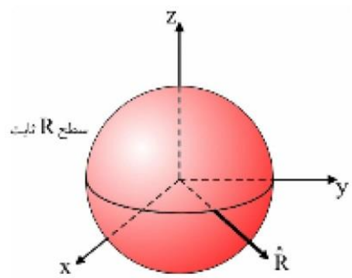
راستگرد بودن دستگاه :

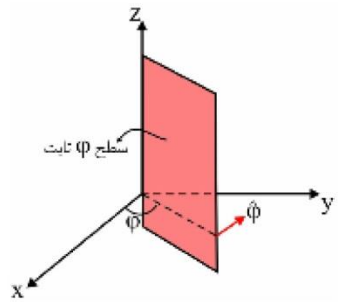
$\hat{a}_r \times \hat{a}_\phi = \hat{a}_z$, $\hat{a}_\phi \times \hat{a}_z = \hat{a}_r$, $\hat{a}_z \times \hat{a}_r = \hat{a}_\phi$

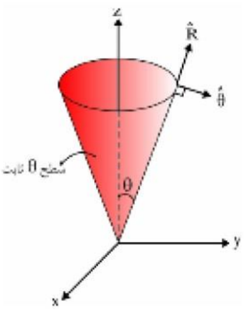
نمایش بردار :

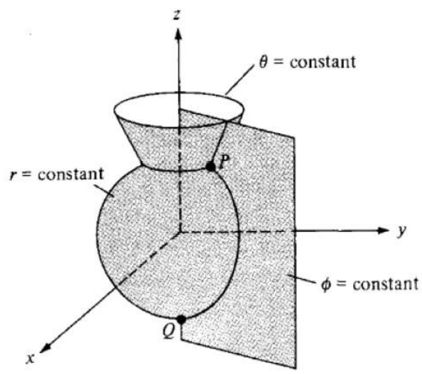
$$\vec{A} = \vec{a}_r A_r + \vec{a}_\varphi A_\varphi + \vec{a}_z A_z$$

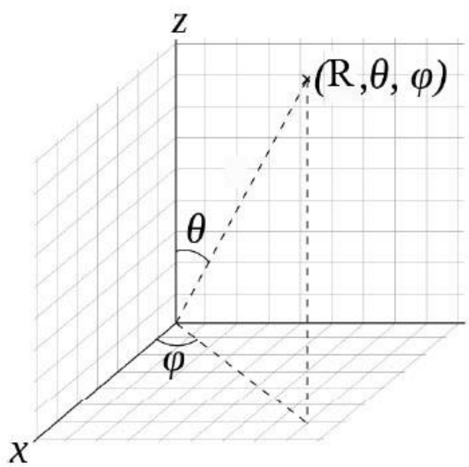
دستگاه مختصات کروی :









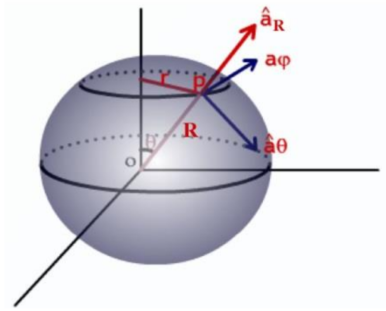


$$P = (R, \theta, \varphi)$$

$$0 \le R < \infty$$

$$0 \le \theta \le \pi$$

$$0 \le \phi < 2\pi$$



بردارهای یکه: $\vec{a}_R, \vec{a}_\theta, \vec{a}_\varphi$

$$\hat{a}_R \cdot \hat{a}_R = 1 \ , \quad \hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_\phi = 1 \ , \quad \hat{a}_\theta \cdot \hat{a}_\theta = 1$$

متعامد بودن صفحات :

$$\hat{a}_R \cdot \hat{a}_\theta = 0 \ , \hat{a}_\theta \cdot \hat{a}_\phi = 0 \ , \ \hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_R = 0$$

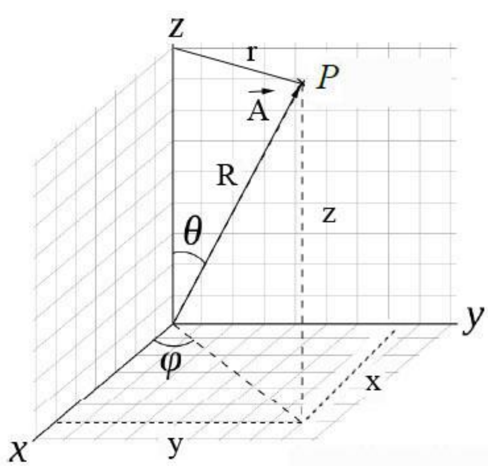
راستگرد بودن دستگاه :

$$\hat{a}_R \times \hat{a}_\theta = \hat{a}_\phi \quad , \quad \hat{a}_\theta \times \hat{a}_\phi = \hat{a}_R \quad , \quad \hat{a}_\phi \times \hat{a}_R = \hat{a}_\theta$$

نمایش بردار :

$$\vec{A} = \vec{a}_R A_R + \vec{a}_\theta A_\theta + \vec{a}_\varphi A_\varphi$$

بردار مکان :



$\vec{A} = x\,\hat{a}_x + y\,\hat{a}_y + z\,\hat{a}_z \quad |\vec{A}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$\vec{A} = r\,\hat{a}_r + z\,\hat{a}_z \quad |\vec{A}| = \sqrt{r^2 + z^2}$

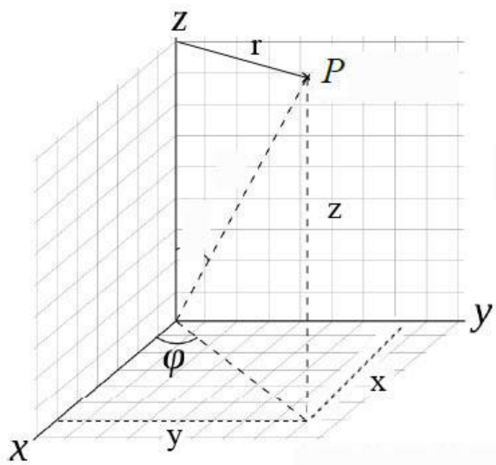
$\vec{A} = R\,\hat{a}_R \quad |\vec{A}| = R$

تبدیل در دستگاه های مختصات مختلف:

- تبدیل نقاط
- تبدیل بردارها

تبدیل دکارتی به استوانه ای و بالعکس:

تبدیل نقاط:



$P = (x, y, z)$

$P = (r, \varphi, z)$

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$z = z$$

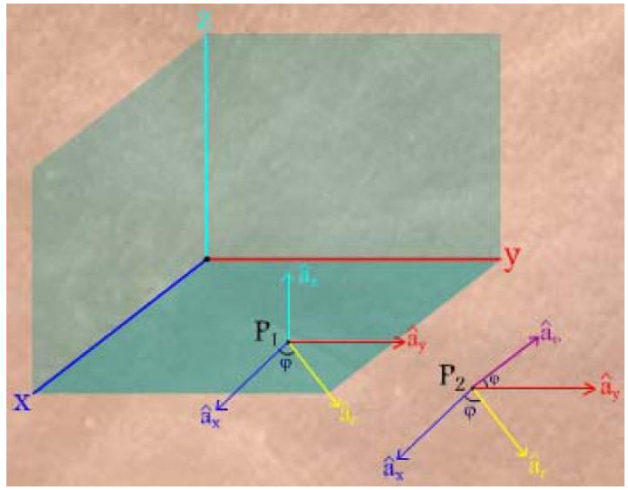
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\varphi = \tan^{-1} {y}/{x}$$
$$z = z$$

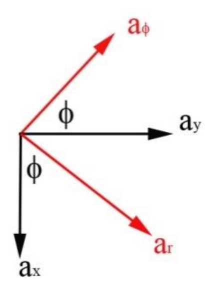
تبدیل بردارها:

$$\vec{A} = \vec{a}_r A_r + \vec{a}_\varphi A_\varphi + \vec{a}_z A_z = \vec{a}_x A_x + \vec{a}_y A_y + \vec{a}_z A_z$$

$$A_x = A \cdot \vec{a}_x = (\vec{a}_r A_r + \vec{a}_\varphi A_\varphi + \vec{a}_z A_z) \cdot \vec{a}_x = (\vec{a}_r \cdot \vec{a}_x) A_r + (\vec{a}_\varphi \cdot \vec{a}_x) A_\varphi$$

$$A_r = \hat{a}_r . (A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z) = A_x \hat{a}_r . \hat{a}_x + A_y \hat{a}_r . \hat{a}_y + A_z \hat{a}_r . \hat{a}_z$$





$$\hat{a}_r.\hat{a}_x = 1\times 1\times \cos\varphi$$
$$\hat{a}_r.\hat{a}_y = \cos(90-\varphi) = \sin\varphi$$
$$\hat{a}_r.\hat{a}_z = 0$$
$$\hat{a}_\varphi.\hat{a}_x = \cos(90+\varphi) = -\sin\varphi$$
$$\hat{a}_\varphi.\hat{a}_y = \cos\varphi$$
$$\hat{a}_\varphi.\hat{a}_z = 0$$
$$\hat{a}_z.\hat{a}_x = \hat{a}_z.\hat{a}_y = 0 \quad , \quad \hat{a}_z.\hat{a}_z = 1$$

تبدیل استوانه ای به دکارتی

$A_x = A_r \cos\phi - A_\phi \sin\phi$

$A_y = A_r \sin\phi + A_\phi \cos\phi$

$A_z = A_z$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix}$$

تبدیل دکارتی به استوانه ای

$A_r = A_x \cos\phi + A_y \sin\phi$

$A_\phi = -A_x \sin\phi + A_y \cos\phi$

$A_z = A_z$

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

مثال: مطلوبست نمايش بردار $\vec{A}$ در مختصات مستطيلي:

$$\vec{A} = \hat{a}_r 3\cos\varphi - \hat{a}_\varphi 2r + \hat{a}_z 5$$

بنابراين

$$A_r = 3\cos\varphi \quad , \quad A_\varphi = -2r \quad , \quad A_z = 5$$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\cos\varphi \\ -2r \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cos^2\varphi + 2r\sin\varphi \\ 3\sin\varphi\cos\varphi - 2r\cos\varphi \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$A_x = 3\cos^2\varphi + 2r\sin\varphi$$

$$A_y = 3\sin\varphi\cos\varphi - 2r\cos\varphi$$

$$A_z = 5$$

سپس پارامترهاي موجود در مؤلفه‌هاي بدست آمده را به مختصات مستطيلي تبديل مي‌كنيم:

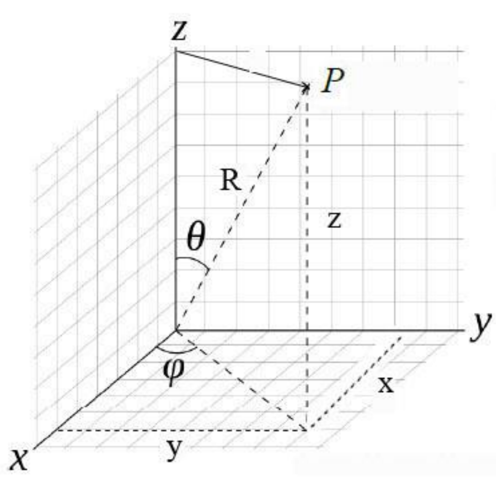
$$\cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$A_x = 3\frac{x^2}{x^2+y^z} + 2y \quad , \quad A_y = 3\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \times \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2x = \frac{3xy}{x^2+y^2} - 2x$$

$$\vec{A} = \hat{a}_x\left(\frac{3x^2}{x^2+y^2} + 2y\right) + \hat{a}_y\left(\frac{3xy}{x^2+y^2} - 2x\right) + \hat{a}_z 5$$

تبدیل دکارتی به کروی و بالعکس:

تبدیل نقاط:



$$P = (x, y, z)$$

$$P = (R, \theta, \varphi)$$

$$x = R\sin\theta\cos\theta$$

$$y = R\sin\theta\sin\varphi$$

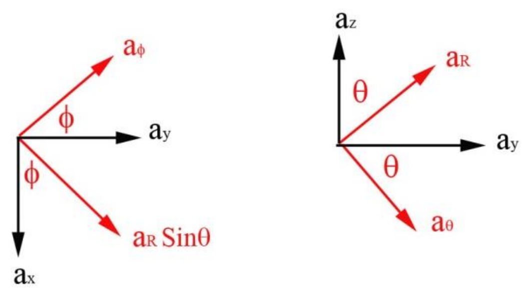
$$z = R\cos\theta$$

$$R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

تبدیل بردارها:



ماتريس تبديل مختصات مستطيلي به كروي:

$$\begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

و برعكس: ماتريس تبديل مختصات كروي به مستطيلي:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix}$$

مثال:

بردار مكان يك نقطه كلي در مختصات كروي را بدست آوريد:

$$\vec{A} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z$$

$$\begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\sin\theta\cos\varphi + y\sin\theta\sin\varphi + z\cos\theta \\ y\cos\theta\cos\varphi + y\cos\theta\sin\varphi - z\sin\theta \\ -x\sin\varphi + y\cos\varphi + 0 \end{bmatrix}$$

$$A_R = x\sin\theta\cos\varphi + y\sin\theta\sin\varphi + z\cos$$

$$= R\sin^2\theta\cos^2\varphi + R\sin^2\theta\sin^2\varphi + R\cos^2\theta$$

$$= R\sin^2\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + R\cos^2\theta$$

$$= R\sin^2\theta + R\cos^2\theta$$

$$= R(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = R$$

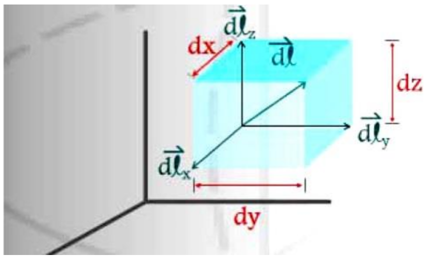
و به همین ترتیب $A_\theta = 0 \quad , \quad A_\varphi = 0$

بنابراین: $\vec{A} = R\hat{a}_R$

حساب برداری

برای مطالعه انتگرال های خطی ، سطحی و حجمی باید از تغییرات دیفرانسیلی مناسب با نوع انتگرال و همچنین نوع دستگاه مختصات استفاده کرد.

عناصر دیفرانسیلی در دستگاه دکارتی



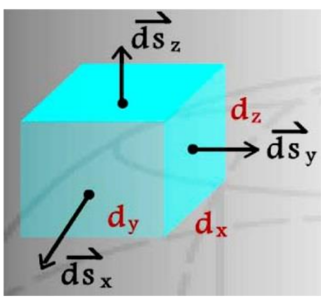
عناصر طول:

$$dl_x = dx \ , dl_y = dy , dl_z = dz$$

بردار عناصر طول :

$$d\vec{l}_x = dx\hat{a}_x , d\vec{l}_y = dy\hat{a}_y , d\vec{l}_z = dz\hat{a}_z$$
$$d\vec{l} = d\vec{l}_x + d\vec{l}_y + d\vec{l}_z$$
$$d\vec{l} = dx\hat{a}_x + dy\hat{a}_y + dz\hat{a}_z$$

$$|\vec{dl}| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$



عناصر سطح:

$$ds_x = dydz \ , \ ds_y = dxdz \ , \ ds_z = dxdy$$

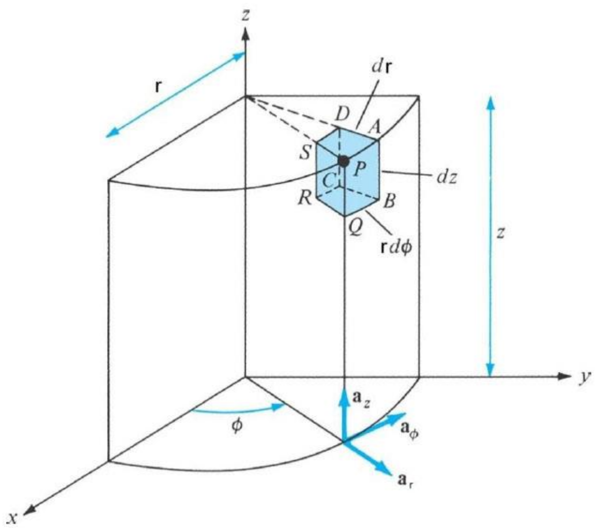
بردار عناصر سطح:

$$d\vec{s}_x = \hat{a}_x dydz , d\vec{s}_y = \hat{a}_y dxdz \ , d\vec{s}_z = \hat{a}_z dxdy$$
$$d\vec{s} = d\vec{s}_x + d\vec{s}_y + d\vec{s}_z$$
$$d\vec{s} = \hat{a}_x dydz + \hat{a}_y dxdz + \hat{a}_z dxdy$$

عنصر حجم :

$$dv = dxdydz$$

عناصر دیفرانسیلی در دستگاه استوانه ای



عناصر طول:

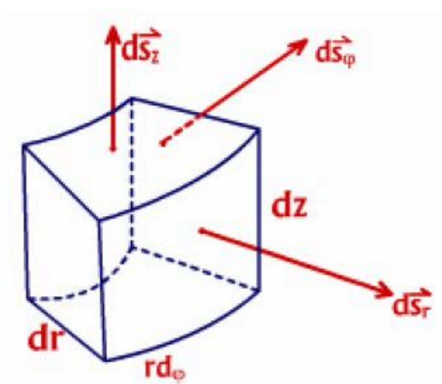
$$dl_r = dr\ ,\ dl_\varphi = rd\varphi\ ,\ dl_z = dz$$

بردار عناصر طول:

$$d\vec{l}_r = dr\hat{a}_r\ ,\ d\vec{l}_\varphi = rd\varphi\hat{a}_\varphi\ ,\ d\vec{l}_z = dz\hat{a}_z$$
$$d\vec{l} = dr\hat{a}_r + rd\varphi\hat{a}_\varphi + dz\hat{a}_z$$

$$\left|\vec{dl}\right| = \sqrt{dr^2 + (rd\varphi)^2 + dz^2}$$

عناصر سطح:



$$ds_r = rd\varphi \times dz\ ,\ ds_\varphi = dr \times dz\ ,\ ds_z = rd\varphi \times dr$$

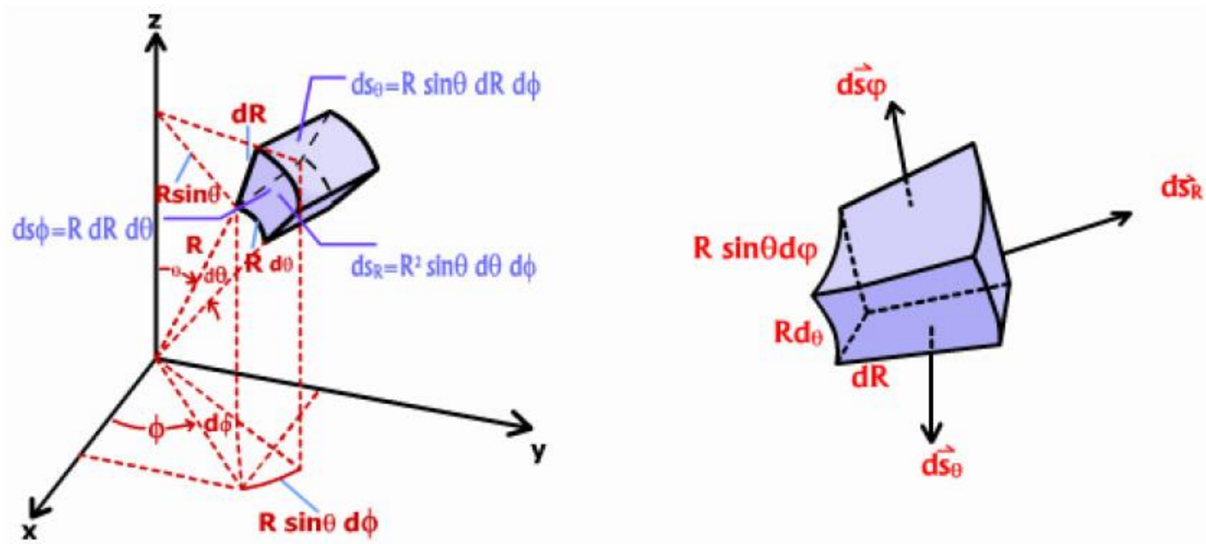
بردار عناصر سطح:

$$d\vec{s}_r = \hat{a}_r rd\varphi dz\ ,\ d\vec{s}_\varphi = \hat{a}_\varphi drdz\ ,\ d\vec{s}_z = \hat{a}_z rdrd\varphi$$
$$d\vec{s} = \hat{a}_r rd\varphi dz + \hat{a}_\varphi drdz + \hat{a}_z rdrd\varphi$$

عنصر حجم :

$$dv = rdrd\phi dz$$

عناصر دیفرانسیلی در دستگاه کروی



عناصر طول:

$$dl_R = dR\,,\ dl_\theta = Rd\theta\ ،\ dl_\varphi = R\sin\theta d\varphi$$

بردار عناصر طول:

$$d\vec{l}_R = \hat{a}_R dR\ ،\ d\vec{l}_\theta = \hat{a}_\theta Rd\theta\ ،\ d\vec{l}_\varphi = \hat{a}_\varphi R\sin\theta d\varphi$$

$$d\vec{l} = \hat{a}_R dR + \hat{a}_\theta Rd\theta + \hat{a}_\varphi R\sin\theta d\varphi$$

$$\left|\overrightarrow{dl}\right| = \sqrt{dR^2 + (Rd\theta)^2 + (Rsin\theta d\varphi)^2}$$

عناصر سطح:

$$ds_R = R\sin\theta d\varphi \times Rd\theta\ ،\ ds_\theta = R\sin\theta d\varphi \times dR\ ،\ ds\varphi = Rd\theta \times dR$$

بردار عناصر سطح:

$$d\vec{s}_R = \hat{a}_R R^2 \sin\theta d\theta d\varphi\ ،\ d\vec{s}_\theta = \hat{a}_\theta R\sin\theta dR d\varphi\ ,\ d\vec{s}_\varphi = \hat{a}_\varphi R dR d\theta$$

$$d\vec{s} = \hat{a}_R R^2 \sin\theta d\theta d\varphi + \hat{a}_\theta R\sin\theta dR d\varphi + \hat{a}_\varphi R dR d\theta$$

عنصر حجم :

$$dv = R^2 \sin\theta dR d\theta d\varphi$$

انتگرال برداری

$$\int_{\ell} \mathbf{A}\cdot d\boldsymbol{\ell}\ ,\ \oint_{C} \mathbf{A}\cdot d\boldsymbol{\ell}\ ,\ \oint_{S} \mathbf{A}\cdot \mathbf{ds}\ ,\ \int \mathbf{A}\cdot \mathbf{ds}$$

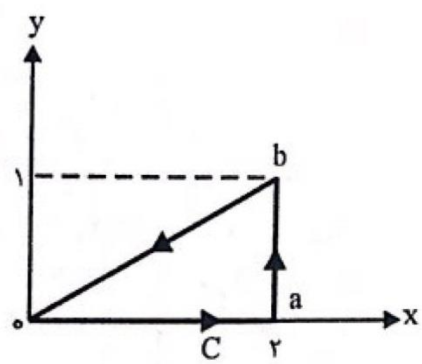
$$\int_{V} F\, dv\ ,\ \int_{\ell} F\, d\boldsymbol{\ell}\ ,\ \oint_{S} F\, \mathbf{ds}\ ,\ \int_{S} F\, \mathbf{ds}\ ,\ \int_{V} \mathbf{A}\, dv$$

انتگرال خط:

$\int_C \mathbf{A}\, dL$ و $\int_C \mathbf{A}\, dL$ ، $\int_C \mathbf{A}\, dL$ ، $\int_C \mathbf{A}\times d\mathbf{l}$ ، $\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{L}$

$$\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{L} = \int_C A_x(x,y,z)\,dx + \int_C A_y(x,y,z)\,dy + \int_C A_z(x,y,z)\,dz$$

مثال ۱-۲ مطلوب است محاسبه $\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{L}$ روی مسیر بسته شکل ۱-۱۵ وقتی که بردار **A** به‌صورت $\mathbf{A}=(۲x+y^۲)\hat{\mathbf{a}}_x + (۳y-۴x)\hat{\mathbf{a}}_y$ بیان شود (از علامت «$\oint$» برای نمایش انتگرال روی یک مسیر بسته استفاده می‌شود).



شکل ۱-۱۵: مسیر انتگرال خط برای مثال ۱-۲

حل:

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{L} = \oint_C (۲x+y^۲)\,dx + \oint_C (۳y-۴x)\,dy$$

$$K_۱ = \oint_C (۲x+y^۲)\,dx = \int_۰^a (۲x+y^۲)\,dx + \int_a^b (۲x+y^۲)\,dx + \int_b^۰ (۲x+y^۲)\,dx$$

در فاصله ۰ تا a، $y=۰$، $x_۰=۰$ و $x_a=۲$ است. به همین ترتیب در فاصله a تا b، $x=x_a=x_b=۲$ و در فاصله b تا ۰، $y=x/۲$، $x_b=۲$ و $x_۰=۰$ است. بنابراین:

$$K_۱=\int_۰^۲ (۲x+۰)\,dx+\int_۲^۲ (۴+y^۲)\,dx+\int_۲^۰ \left(۲x+\frac{x^۲}{۴}\right) dx=۴+۰-\frac{۱۴}{۳}=-\frac{۲}{۳}$$

به همین ترتیب :

$$K_۲=\oint_C (۳y-۴x)\,dy=\left[\int_۰^a+\int_a^b+\int_b^۰\right](۳y-۴x)\,dy$$

$$=\int_۰^۰ (۰-۴x)\,dy+\int_۰^۱ (۳y-۸)\,dy+\int_۱^۰ (۳y-۸y)\,dy=۰-\frac{۱۳}{۲}+\frac{۵}{۲}=-۴$$

و سرانجام :

$$\oint_C \mathbf{A}.d\mathbf{L}=K_۱+K_۲=-\frac{۲}{۳}-۴=-\frac{۱۴}{۳}$$

مثال ۱-۳ مطلوب است محاسبه $\int_C \mathbf{A}.d\mathbf{L}$ برای $\mathbf{A}=(yz+۲x)\,\hat{a}_x+xz\,\hat{a}_y+(xy+۲z)\,\hat{a}_z$ وقتی که منحنی C با معادلات $z=۱$ و $x^۲+y^۲=۱$ مشخص شود. انتگرال را از نقطه (۱ , ۱ , ۰) تا نقطه (۱ , ۰ , ۱) محاسبه کنید.

حل :

$$\int_C \mathbf{A}.d\mathbf{L}=\int_C (yz+۲x)\,dx+\int_C xz\;dy+\int_C (xy+۲z)\,dz$$

$$K_۱=\int_C (yz+۲x)\,dx=\int_۰^۱ (\sqrt{۱-x^۲}+۲x)\,dx \quad ; \quad z=۱, y=\sqrt{۱-x^۲}$$

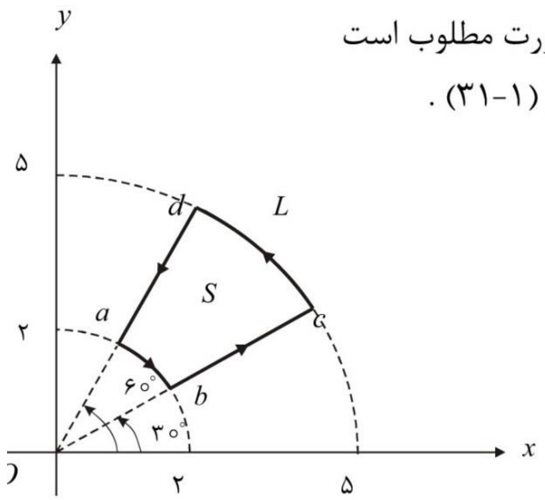
$$K_۲=\int_C xz\;dy=\int_۱^۰ \sqrt{۱-y^۲}\,dy=-\int_۰^۱ \sqrt{۱-y^۲}\,dy \quad ; \quad z=۱, x=\sqrt{۱-y^۲}$$

$$K_۳=\int_C (xy+۲z)\,dz=\int_۱^۱ (xy+۲z)\,dz=۰$$

$$\int_C \mathbf{A}.d\mathbf{L}=K_۱+K_۲+K_۳=\int_۰^۱ ۲x\,dx+\int_۰^۱ \sqrt{۱-x^۲}\,dx-\int_۰^۱ \sqrt{۱-y^۲}\,dy$$

$$=\int_۰^۱ ۲x\,dx=۱$$

مثال ۱-۲۰ اگر $\mathbf{A} = r\cos\varphi\ \mathbf{a}_r + \sin\varphi\ \mathbf{a}_\varphi$ ، در این‌صورت مطلوب است محاسبهٔ $\oint \mathbf{A}\,.\,\mathbf{dl}$ برای مسیر نشان داده شده در شکل (۱-۳۱) .



شکل ۱-۳۱: شکل مثال ۱-۲۰

حل: می‌توانیم بگوییم که:

$$\oint_L \mathbf{A}\,.\,\mathbf{dl} = \left[\int_a^b + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^a\right]\mathbf{A}\,.\,\mathbf{dl}$$

در طول مسیر ab همواره $r = ۲$ بوده از اینرو:

$$\mathbf{dl} = -r\,d\varphi\ \mathbf{a}_\varphi = -۲\,d\varphi\ \mathbf{a}_\varphi$$

پس:

$$\int_a^b \mathbf{A}\ .\ \mathbf{dl} = \int_{\varphi=۶۰}^{۳۰} (r\cos\varphi\ \mathbf{a}_r + \sin\varphi\ \mathbf{a}_\varphi)\ .\ (-۲d\varphi\ \mathbf{a}_\varphi) = -۲\cos\varphi\Big|_{۶۰^\circ}^{۳۰^\circ} = -(\sqrt{۳}-۱)$$

به همین صورت برای دیگر مسیرها خواهیم داشت:

$$\int_b^c \mathbf{A}\ .\ \mathbf{dl} = \int_{r=۲}^{۵} (r\cos\varphi\ \mathbf{a}_r + \sin\varphi\ \mathbf{a}_\varphi)\ .\ (dr\ \mathbf{a}_r) = \cos ۳۰^\circ\ \frac{r^۲}{۲}\Big|_{۲}^{۵} = \frac{۲۱\sqrt{۳}}{۴}$$

$$\int_c^d \mathbf{A}\ .\ \mathbf{dl} = \int_{\varphi=۳۰}^{۶۰} (r\cos\varphi\ \mathbf{a}_r + \sin\varphi\ \mathbf{a}_\varphi)\ .\ (۵d\varphi\ \mathbf{a}_\varphi) = -۵\cos\varphi\Big|_{۳۰^\circ}^{۶۰^\circ} = \frac{۵}{۲}(\sqrt{۳}-۱)$$

$$\int_c^d \mathbf{A}\ .\ \mathbf{dl} = \int_{r=۵}^{۲} (r\cos\varphi\ \mathbf{a}_r + \sin\varphi\ \mathbf{a}_\varphi)\ .\ (-dr\ \mathbf{a}_r) = \cos ۶۰^\circ\ \frac{r^۲}{۲}\Big|_{۵}^{۲} = -\frac{۲۱}{۴}$$

نتیجه اینکه:

$$\oint_l \mathbf{A}\,.\,\mathbf{dl} = \frac{۲۷}{۴}(\sqrt{۳}-۱) = ۴.۹۴۱$$

مثال ۱-۲۱ انتگرال زیر را روی دایره‌ای به مرکز مبدا مختصات و شعاع ۲ واقع در صـفحهٔ xy حـساب کنید.

$$\mathbf{I} = \int r\cos\varphi\ \mathbf{a}_{\varphi}\ d\ell$$

حل: $d\ell$ روی مسیر فوق به صورت $d\ell = ۲d\varphi$ خواهد بود. باید $\mathbf{a}_{\varphi}$ را به عوامل پایه تجزیه کنیم تا ایـن انتگرال قابل حل شود. داریم:

$$\mathbf{a}_{\varphi} = -\sin\varphi\ \mathbf{a}_x + \cos\varphi\ \mathbf{a}_y$$

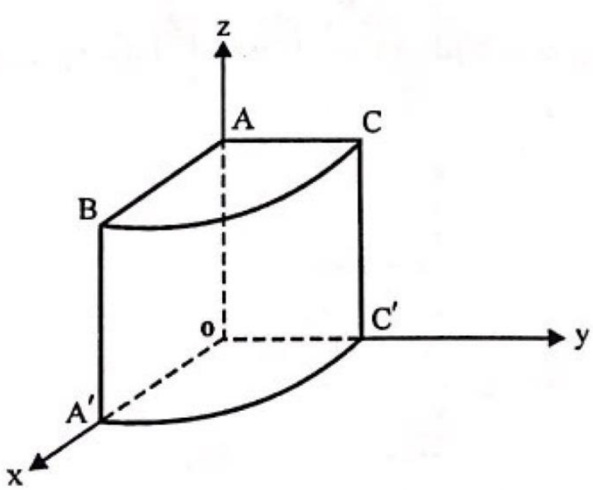
پس به سادگی محاسبه می‌کنیم:

$$\mathbf{I} = \int r\sin\varphi\ \mathbf{a}_{\varphi} d\ell = \int_{۰}^{۲\pi} ۲\cos\varphi\ (-\sin\varphi\ \mathbf{a}_x + \cos\varphi\ \mathbf{a}_y)\ ۲\ d\varphi \Rightarrow \mathbf{I} = \mathbf{a}_y \int_{۰}^{۲\pi} ۴\cos^{۲}\varphi\ d\varphi = ۴\pi\ \mathbf{a}_y$$

انتگرال سطح

$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

مثال ۱-۵ مطلوب است محاسبه $\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ روی سطح بسته‌ای که محدود بـه صـفحات مـختصات ($x=۰$ ، $y=۰$ و $z=۰$)، صفحه $z=l$ و استوانه‌ای به شعاع $r=a$ بوده و در $\frac{۱}{۸}$ اول فضا قرار داشته باشد. بردار $\mathbf{A}$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای به‌صورت $\mathbf{A} = r\cos\varphi\,\hat{\mathbf{a}}_r - r\sin\varphi\,\hat{\mathbf{a}}_{\varphi}$ بیان می‌شود. شکل ۱-۲۰ سطح بسته S را نشان می‌دهد.



شکل ۱-۲۰: سطح بسته S، برای انتگرال سطح مثال ۱-۵

حل: $$\oint_S \mathbf{A}.d\mathbf{S} = \left[\int_{BCC'A'} + \int_{ACC'O} + \int_{ABA'O} + \int_{A'OC'} + \int_{ABC}\right] \mathbf{A}.d\mathbf{S}$$

در محاسبه هر یک از انتگرالهای سمت راست عبارت مزبور، بردار $\mathbf{dS}$ را در جهت عمود و به طرف خارج سطح بسته S در نظر می‌گیریم.

$$K_۱ = \int_{BCC'A'} \mathbf{A}.d\mathbf{S} = \int_{BCC'A'} (r\cos\varphi\,\hat{a}_r - r\sin\varphi\,\hat{a}_\varphi).(r\,d\varphi\,dz\,\hat{a}_r), \quad r=a$$

$$= \int_{BCC'A'} r^۲\cos\varphi\,d\varphi\,dz = a^۲\int_۰^{\pi/۲}\cos\varphi\,d\varphi\int_۰^l dz = a^۲ l$$

$$K_۲ = \int_{ACC'O} \mathbf{A}.d\mathbf{S} = \int_{ACC'O} (r\cos\varphi\,\hat{a}_r - r\sin\varphi\,\hat{a}_\varphi).(dr\,dz\,\hat{a}_\varphi), \quad \varphi = \frac{\pi}{۲}$$

$$= \int_{ACC'O} -r\sin\varphi\,dr\,dz = -\int_۰^a r\,dr\int_۰^l dz = -\frac{۱}{۲}a^۲ l$$

$$K_۳ = \int_{ABA'O} \mathbf{A}.d\mathbf{S} = \int_{ABA'O} (r\cos\varphi\,\hat{a}_r - r\sin\varphi\,\hat{a}_\varphi).(-dr\,dz\,\hat{a}_\varphi), \quad \varphi = ۰$$

$$= ۰$$

$$K_۴ = \int_{A'OC'} \mathbf{A}.d\mathbf{S} = \int_{A'OC'} (r\cos\varphi\,\hat{a}_r - r\sin\varphi\,\hat{a}_\varphi).(-r\,d\varphi\,dr\,\hat{a}_z), \quad z = ۰$$

$$= ۰$$

$$K_۵ = \int_{ABC} \mathbf{A}.d\mathbf{S} = \int_{ABC} (r\cos\varphi\,\hat{a}_r - r\sin\varphi\,\hat{a}_\varphi).(r\,dr\,d\varphi\,\hat{a}_z), \quad z = l$$

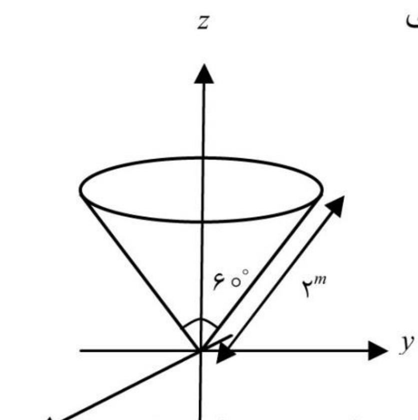
$$= ۰$$

پس

$$\oint_S \mathbf{A}.d\mathbf{S} = \sum_{i=۱}^{۵} K_i = \frac{a^۲ l}{۲}$$

■

مثال ۱-۲۴ مقدار انتگرال $\int_s \mathbf{A}\,.\,\mathbf{d}s$ که $\mathbf{A}=\frac{1}{R}\,\mathbf{a}_\theta$ و S سطح جانبی مخروطی به طول 2^m و زاویهٔ 60° است را بدست آورید.



شکل ۱-۳۴: شکل مثال ۱-۲۴

حل: از روی شکل می‌توان **ds** را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\mathbf{ds}=R\sin 30^\circ\ d\varphi\ dR\ \mathbf{a}_\theta=\frac{1}{2}R\ dR\ d\varphi\ \mathbf{a}_\theta$$

پس خواهیم داشت:

$$\int \mathbf{A}\ .\ \mathbf{ds}=\int_0^2\int_0^{2\pi}\frac{1}{R}\ \mathbf{a}_\theta\ .\ \frac{1}{2}R\ \ dR\ \ d\varphi\ \mathbf{a}_\theta=\int_0^2\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\ dR\ \ d\varphi=2\pi$$

انتگرال حجم

$$\int_v A dv$$

مثال ۱-۶ بار الکتریکی با چگالی حجمی $\rho=\rho_0 r^2/a^2$ برای $r\leq a$ در کره‌ای به شعاع a توزیع شده است. مقدار کل بار الکتریکی را محاسبه نمایید.

$$Q=\int_V \rho\, dV=\int_V \rho_0\frac{r^2}{a^2}(r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi)$$

$$=\frac{\rho_0}{a^2}\int_0^a r^4 dr\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi=\frac{4}{5}\rho_0\pi a^3$$

مشتقات میدان های اسکالر و برداری

میدان تابعی ریاضی که بیانگر تغییرات یک کمیت فیزیکی در ناحیه ای از فضا است(کمیتی که با مکان تغییر می کند- تابع مکان)

انواع میدان :

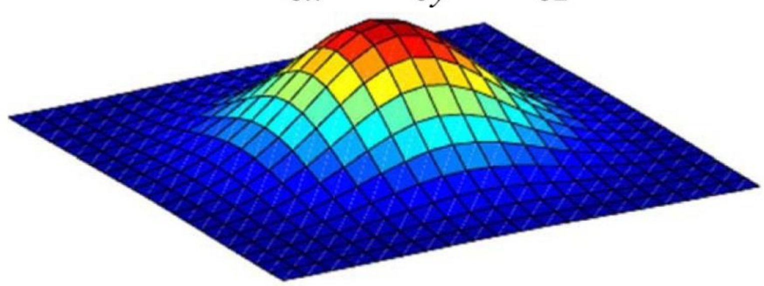
- اسکالر مانند توزیع دما در یک اتاق
- برداری مانند جاذبه زمین
- هدف بررسی مشتقات این میدان ها نسبت به مکان است که تحت عنوان گرادیان ، دیورژانس و کرل بیان می شود.

گرادیان :

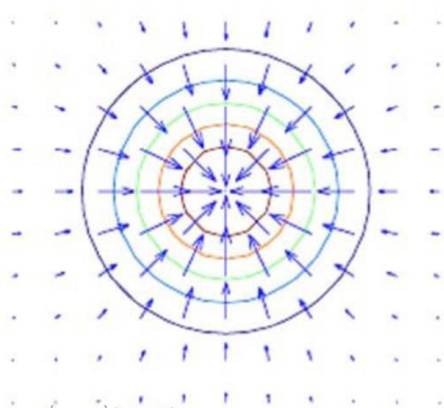
برداری که اندازه و جهت حداکثر نرخ فضایی افزایش یک کمیت عددی را نمایش می‌دهد، **گرادیان** آن کمیت عددی نامیده می‌شود. اپراتور گرادیان روی یک تابع اسکالر عمل کرده و نتیجه آن ماکزیمم تغییرات تابع اسکالر و جهت آن جهت ماکزیمم تغییرات است.

$$\text{گرادیان } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{a}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{a}_z$$

$$\nabla = \mathbf{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z}$$



منحنی تابع $z = e^{-(x^2+y^2)} = e^{-r^2}$



منحنی گرادیان تابع $z = e^{-(x^2+y^2)} = e^{-r^2}$

بردار گرادیان عمود بر سطح است $\hat{a}_n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$

مشتق جهتی: مشتق تابع f در *راستای مشخص* $\frac{df}{dl} = \nabla f \,.\, \hat{a}_L$ ($\hat{a}_L$ بیانگر راستایی است که می خواهیم مشتق بگیریم)

تغییرات f در راستای $\bar{dl}$: $df = \nabla f . \bar{dl}$

اگر $\bar{dl} = dx\, \hat{a}_x + dy\, \hat{a}_y + dz\, \hat{a}_z$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy + \frac{\partial f}{\partial z}\, dz$$

قضیهٔ اساسی گرادیان :

$$\int_a^b (\nabla f) \,.\, \mathbf{d}\ell = f(b) - f(a)$$

$$\oint \nabla f \,.\, \bar{dl} = 0$$

$$\nabla(V+U) = \nabla V + \nabla U$$

$$\nabla(VU) = V(\nabla U) + U(\nabla V)$$

$$\nabla\left(\frac{V}{U}\right) = \frac{U\ \nabla V - V\ \nabla U}{U^۲}$$

$$\nabla V^n = nV^{n-1}\, \nabla V$$

کارتزین

$$\nabla V = \hat{a}_x \frac{\partial V}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial V}{\partial y} + \hat{a}_z \frac{\partial V}{\partial z}$$

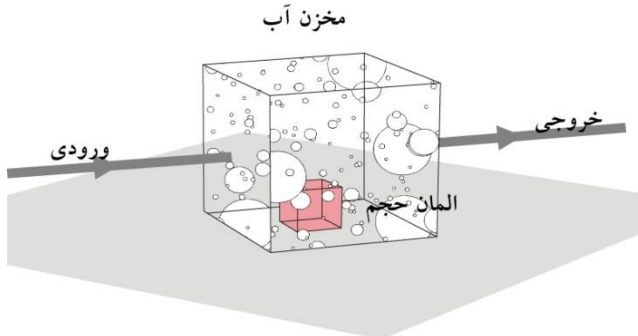
استوانه ای

$$\nabla V = \hat{a}_r \frac{\partial V}{\partial r} + \hat{a}_\phi \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi} + \hat{a}_z \frac{\partial V}{\partial z}$$

کروی

$$\nabla V = \hat{a}_R \frac{\partial V}{\partial R} + \hat{a}_\theta \frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial \theta} + \hat{a}_\phi \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}$$

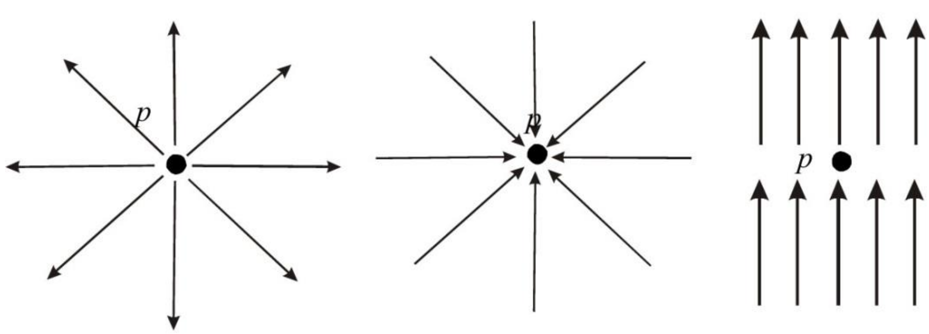
دیورژانس



$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint \mathbf{D} \cdot \mathbf{ds}}{\Delta V}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = div\ \mathbf{A}$$

$$\boxed{divA = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$



قضیهٔ دیورژانس

$$\boxed{\int \nabla \cdot \mathbf{A}\ dv = \oint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{ds}}$$

دکارتی:

$$\vec{\nabla}.\vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

استونه ای:

$$\vec{\nabla}.\vec{A}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

کروی:

$$\vec{\nabla}.\vec{A}=\frac{1}{R^2\sin\theta}[\frac{\partial}{\partial R}(R^2\sin\theta A_R)+\frac{\partial}{\partial\theta}(R\sin\theta A_\theta)+\frac{\partial}{\partial\phi}(RA_\phi)]$$

$$\vec{\nabla}.\vec{A}=\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2A_R)+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta)+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

کرل :

کرل یک بردار میزان جرخشی است که آن بردار ایجاد می کند

$$\nabla\times\mathbf{A}=\begin{vmatrix}\mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}$$

کارتزین

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}$$

$$=\hat{a}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)-\hat{a}_y\left(\frac{\partial A_z}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)+\hat{a}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

استوانه ای

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\frac{1}{r}\begin{vmatrix}\hat{a}_r & r\hat{a}_\phi & \hat{a}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_r & rA_\phi & A_z\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{r}\left(\hat{a}_r\left(\frac{\partial A_z}{\partial \phi}-\frac{r\partial A_\phi}{\partial z}\right)-r\hat{a}_\phi\left(\frac{\partial A_z}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial z}\right)+\hat{a}_z\left(\frac{r\partial A_\phi}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial \phi}\right)\right)$$

$$=\hat{a}_r\left(\frac{\partial A_z}{r\partial \phi}-\frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)-\hat{a}_\phi\left(\frac{\partial A_z}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial z}\right)+\hat{a}_z\left(\frac{\partial A_\phi}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{r\partial \phi}\right)$$

کروی

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\frac{1}{R^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\hat{a}_R & R\hat{a}_\theta & R\sin\theta\hat{a}_\phi\\ \dfrac{\partial}{\partial R} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \phi}\\ A_R & RA_\theta & R\sin\theta A_\phi\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{R^2\sin\theta}\left(\hat{a}_R\left(\frac{\partial R\sin\theta A_\phi}{\partial \theta}-\frac{\partial RA_\theta}{\partial \phi}\right)-R\hat{a}_\theta\left(\frac{\partial R\sin\theta A_\phi}{\partial R}-\frac{\partial A_R}{\partial \phi}\right)+R\sin\theta\hat{a}_\phi\left(\frac{\partial RA_\theta}{\partial R}-\frac{\partial A_R}{\partial \theta}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{R^2\sin\theta}\left(R\hat{a}_R\left(\frac{\partial\sin\theta A_\phi}{\partial \theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right)-R\hat{a}_\theta\left(\sin\theta\frac{\partial RA_\phi}{\partial R}-\frac{\partial A_R}{\partial \phi}\right)+R\sin\theta\hat{a}_\phi\left(\frac{\partial RA_\theta}{\partial R}-\frac{\partial A_R}{\partial \theta}\right)\right)$$

$$=\left(\frac{1}{R\sin\theta}\hat{a}_R\left(\frac{\partial\sin\theta A_\phi}{\partial \theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right)-\frac{1}{R\sin\theta}\hat{a}_\theta\left(\sin\theta\frac{\partial RA_\phi}{\partial R}-\frac{\partial A_R}{\partial \phi}\right)+\frac{1}{R}\hat{a}_\phi\left(\frac{\partial RA_\theta}{\partial R}-\frac{\partial A_R}{\partial \theta}\right)\right.$$